a

Ułamki dziesiętne

Życie wyłącznie z ułamkami zwykłymi byłoby bardzo ciężkie i smutne. Wystarczy wyobrazić sobie konkurs na top modelkę, w którym komisja spisywałaby wymiary kandydatek:

Krystyna, lat 29, wzrost: cm, waga: kg, biust: cm, talia: cm, biodra: cm. Bożena, lat 21, wzrost: cm, waga: kg, biust: cm, talia: cm, biodra: cm.

Obok stolika jurorów urzęduje sztab matematyków, którzy sprowadzają wszystkie parametry do wspólnego mianownika, a następnie porównują liczniki biustu, talii i bioder. Da się z tym żyć, jednak co to za życie.

Nowe spojrzenie

Intuicje

W praktyce zależy nam na tym, aby jeden rzut oka na liczbę wystarczył, by ocenić, czy jest ona duża, czy mała. Liczby naturalne mają stosunkowo łatwą konstrukcję: cyfry bardziej po lewej mają większą wagę, a bardziej po prawej są mniej znaczące. Analogiczną metodę można wprowadzić do zapisu ułamków.

W tym celu stosuje się przecinek. Liczbę zapisaną w postaci

21,7

rozumiemy jako liczbę mieszaną , czyli ułamek . Liczba

0,74

Oznacza ułamek lub ekscentrycznie zapisaną liczbę mieszaną .

Liczba zapisana za pomocą przecinka zawsze zawiera ułamek, którego mianownik to 10, 100, 1000, 10000 itd. Zer w mianowniku zawsze będzie tyle, ile cyfr występuje po przecinku.

Liczba zapisana z użyciem przecinka to właśnie ułamek dziesiętny. Ułamki dziesiętne dominują w fizyce i naukach technicznych. Matematyka jest jedyną dziedziną życia[[1]](#footnote-1), w której ułamki zwykłe stosuje się częściej niż dziesiętne.

Nazewnictwo

Intuicje

Gdy zapiszemy liczbę w postaci ułamka dziesiętnego, widzimy jej *rozwinięcie dziesiętne*. Sam przecinek nazywa się czasem *przecinkiem dziesiętnym* albo rzadziej *separatorem dziesiętnym*. Bardzo często zamiast przecinka stosuje się kropkę. W krajach zagranicznych użycie przecinka byłoby wręcz kontrowersyjne.

W przestarzałych źródłach możemy znaleźć słowo „koma” (ang. comma - przecinek) zaznaczające pozycję przecinka. Dziś zamiast czytać 1,67 jako „jeden koma sześćdziesiąt siedem” mówimy „jeden przecinek sześćdziesiąt siedem” albo profesjonalniej „jeden i sześćdziesiąt siedem setnych”.

Ułamki dziesiętne stanowią płynne rozszerzenie liczb naturalnych. Liczba zapisana jest za pomocą serii cyfr od lewej do prawej. Cyfry te mają swoje nazwy – idąc w lewo od przecinka mamy cyfry jedności, dziesiątek, setek i tysięcy. Idąc w prawo od przecinka napotkamy kolejno *cyfrę części dziesiętnych*, *cyfrę części setnych*, *cyfrę części tysięcznych* itd.

* W liczbie 121,34 cyfrą setek jest 1, cyfrą dziesiątek jest 2, cyfrą jedności jest 1, cyfrą części dziesiętnych jest 3, cyfrą części setnych jest 4.

Chociaż liczba 121,34 zapisana jest przy pomocy 5 cyfr, nie mówimy, że jest to liczba pięciocyfrowa. Gdy mówimy o iluś-cyfrowej liczbie, mamy na myśli liczby naturalne. W przeciwnym razie nazwa ta wprowadzałaby zbyt wiele niejednoznaczności.

Fragment liczby przedstawiający jej całkowitą część (przed przecinkiem) to *cecha liczby*. Fragment przedstawiający część ułamkową (po przecinku) to *mantysa liczby*.

* W liczbie 35,034 cecha ma wartość 35, zaś mantysa 0,034.

Mierzenie długości

Intuicje

Przydatność liczb w zapisie dziesiętnym wychodzi na jaw przy mierzeniu długości[[2]](#footnote-2).

Pewnego dnia Krzyś postanowił zmierzyć szerokość swojego biurka. Wziął miarkę o długości metra.[[3]](#footnote-3) Jeden metr to dość dużo – miarka okazała się wystawać poza krawędź biurka

1m

Ponieważ Krzyś jest perfekcjonistą, chce dokładnie określić szerokość biurka. W tym celu dzieli w myślach tasiemkę z miarką na 10 równych części.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Każda z nich ma długość m, czyli 0,1 m. Spostrzegawczy Krzyś zauważa, że do szerokości biurka najlepiej dopasowuje się 8 takich fragmentów, czyli . Jednak ta dokładność wciąż nie zadowala Krzysia – teraz tasiemka nie dosięga krawędzi stołu.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0,8m | | | | | | | |
| a |  |  |  |  |  |  |  |

Idealna długość tasiemki będzie mieścić się gdzieś pomiędzy 0,8 m a 0,9 m. Dla uzyskania perfekcyjnego wyniku Krzyś dzieli dziewiąty segment taśmy na 10 fragmentów. Każdy z nich ma długość takiego segmentu, czyli .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | | | |  |
| a |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | | | | |  |
| a |  |  |  |  |  |  |  |  |

Gdy weźmiemy 4 takie mini-segmenty, tasiemka całkiem nieźle dotyka krawędzi stołu. Wyznaczamy więc orientacyjną długość biurka na 0,84 m. Aby osiągnąć samospełnienie, Krzyś wyciąga lupę. Stwierdza, że 0,84 m nadal nie jest idealną długością.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Długość 0,842 m jest dla Krzysia zadowalająco dokładna.

Przybliżenia

Intuicje

Przed chwilą stosowaliśmy lupę, żeby przybliżyć sobie tasiemkę i lepiej zobaczyć jej segmenty. Przybliżanie liczb nie oznacza jednak przyglądania się im z bliska.

Gdyby Krzyś nie był pedantem, zadowoliłby się wynikiem pomiarów przy 0,8 m. Wtedy Krzyś dokonałby *przybliżenia* lub inaczej *szacowania*[[4]](#footnote-4)długości biurka. W praktyce przybliżanie wielkości to po prostu branie na oko. W matematyce jednak metody przybliżania liczb są ściśle określone.

Najczęściej dokonywanym przybliżeniem jest *zaokrąglenie* liczby. Weźmy wynik pomiarów Krzysia równy 0,842 m.

* Zaokrąglenie 0,842 do części setnych wynosi 0,84.
* Zaokrąglenie 0,842 do części dziesiętnych wynosi 0,8.
* Zaokrąglenie 0,842 do jedności wynosi 1.

Im bardziej zaokrąglamy liczbę, tym bardziej jesteśmy niedbali o jej dokładną wartość.

Zaokrąglenia zawsze dokonujemy do pewnej cyfry, np. do części tysięcznych, do części setnych, do części dziesiętnych, do jedności, albo do wyższych cyfr – do dziesiątek, do setek, do tysięcy. Aby zaokrąglić liczbę do części dziesiętnych, patrzymy na cyfrę bezpośrednio po prawej - cyfrę części setnych. Jeśli wynosi ona 0, 1, 2, 3 albo 4, przybliżenie polega po prostu na ucięciu cyfry części setnych i wszystkich kolejnych. Jeśli jednak wynosi 5, 6, 7, 8 albo 9, cyfrę części dziesiętnych zwiększamy o 1 i ucinamy wszystkie z prawej.

* Zaokrąglenie 17,65401 do części dziesięciotysięcznych wynosi 17,6540.
* Zaokrąglenie 17,65401 do części tysięcznych wynosi 17,654.
* Zaokrąglenie 17,65401 do części setnych wynosi 17,65.
* Zaokrąglenie 17,65401 do części dziesiętnych wynosi 17,7.
* Zaokrąglenie 17,65401 do jedności wynosi 18.
* Zaokrąglenie 17,65401 do dziesiątek wynosi 20.
* Zaokrąglenie 17,65401 do setek wynosi 0.

Symbolicznie określenie przybliżenia wyraża znak przypominający znak równości po kilku głębszych. Możemy zapisać lub lub . Czasem zamiast podwójnej fali spotyka się też , jednak na poziomie wyższej matematyki symbol ten przybiera inne znaczenie.

* Według międzynarodowych przeliczników miar długości mila angielska to 1,609344[[5]](#footnote-5) kilometra. Od patrzenia na taką liczbę bolą oczy. W praktyce wystarczy nam pojęcie, że mila to około 1,6 kilometra, czyli

W zapisie dziesiętnym cyfry z lewej strony mają większą wagę i mocniej wpływają na wielkość liczby niż cyfry po prawej stronie. Każda cyfra ma wagę 10 razy większą niż cyfra bezpośrednio po prawej. Gdy czytamy liczbę od lewej do prawej, kolejne cyfry mają coraz mniejsze znaczenie i jedynie precyzują wartość liczby. Z tego powodu w praktyce możemy czasami „zaniedbać” niektóre cyfry i oglądać liczbę w uproszczonej postaci.

Rozszerzenie

W kontekście ułamków dziesiętnych wprowadzono wątpliwej przydatności pojęcia *podłoga* i *sufit*[[6]](#footnote-6). Podłoga liczby to jej część całkowita. Symbolicznie zdanie „część całkowita (podłoga) liczby 24,389 wynosi 24” zapisujemy jako: .[[7]](#footnote-7) Podłoga to jakby "przybliżanie liczby w dół". Z kolei sufit to "przybliżanie liczby w górę". Symbolicznie . Podłoga i sufit liczb naturalnych są równe.

Nieskończone rozwinięcie dziesiętne

Intuicje

Liczba zapisana jako ułamek dziesiętny to 0,2. Jeśli przypomnimy sobie właściwości rozszerzania ułamków zwykłych, stwierdzimy, że

Z kolei zapisane w postaci dziesiętnej to 0,20. Oznacza to, że

Kontynuując tendencję rozszerzania licznika i mianownika przez 10 otrzymamy

czyli

Dopisywanie zer po przecinku na końcu liczby nic nie zmienia: możemy dopisywać zera bez opamiętania, tak długo, jak chcemy. W gruncie rzeczy możemy dopisać **nieskończenie wiele** zer na końcu ułamka dziesiętnego – i nie zmienimy jego wartości.

Każdej liczbie o skończonym rozwinięciu dziesiętnym możemy urodzić (trochę na siłę) nieskończone rozwinięcie dziesiętne.

Niektóre ułamki zwykłe nie posiadają skończonego rozwinięcia. Zastanówmy się nad zamianą ułamka na ułamek dziesiętny. Gdybyśmy wzięli bardzo dokładną miarkę krawiecką o długości metra i przecięli ją dokładnie w jednej trzeciej długości, otrzymalibyśmy fragment o długości . Żadne skończone rozwinięcie nie przedstawi dokładnej długości miarki. Krzyś mógłby stwierdzić, że . Przyjrzawszy się bliżej, Krzyś skoryguje spostrzeżenie do . Jednak perfekcjonizm Krzysia nie zostanie zaspokojony, dopóki szacowanie nie będzie w pełni dokładne. Niestety, Krzyś został skazany na nieskończone korygowanie przybliżenia.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Niektóre ułamki zwykłe mają mniej eleganckie rozwinięcia dziesiętne. Przykładowo

W powyższych rozwinięciach zauważamy pewne tendencje. W rozwinięciu ułamka powtarza się zbitek liczb . Taki powtarzający się fragment nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego nazywamy *okresem*. Gdy uda nam się zauważyć okres w rozwinięciu, możemy zapisać ułamek w bardziej przejrzystej formie:

Co czytamy jako „zero i sto czterdzieści dwa tysiące osiemset pięćdziesiąt siedem milionowych w okresie”. Podobnie

Tu już nikt nie wie, jak się to czyta.

Co ciekawe, każdy ułamek zwykły da się przedstawić w postaci skończonego ułamka dziesiętnego albo nieskończonego posiadającego okres. O tym, w jaki sposób przeskakiwać z jednego zapisu do drugiego, powiemy za chwilę.

Działania na ułamkach dziesiętnych

Warsztat

Ponieważ ułamki dziesiętne stanowią płynne przedłużenie liczb naturalnych, działania na nich przebiegają bardzo podobnie do tych, które poznaliśmy w tematach o dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu i dzieleniu.

Dodawanie liczb dziesiętnych najlepiej wykonywać w słupku. Kandydatów do sumowania zapisujemy wyrównując do przecinka – tak, aby odpowiadające sobie cyfry (dziesiątek, jedności, części dziesiętnych, części setnych) znajdowały się jedna pod drugą.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 4 | 2 | , | 6 | 7 |  |  |
| + |  | 1 | 9 | , | 1 | 5 | 8 | 2 |
|  |  |  |  | , |  |  |  |  |

Procedura dodawania przebiega identycznie jak w przypadku liczb naturalnych.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  |  | 1 |  |  |  |
|  | 3 | 4 | 2 | , | 6 | 7 |  |  |
| + |  | 1 | 9 | , | 1 | 5 | 8 | 2 |
|  | 3 | 6 | 1 | , | 8 | 2 | 8 | 2 |

Tak samo działa odejmowanie w słupku – najpierw wyrównujemy odjemną i odjemnik względem przecinka.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 4 | 1 | , | 2 | 1 |  |  |
| - |  | 7 | 4 | , | 1 | 3 | 6 | 4 |
|  |  |  |  | , |  |  |  |  |

Jeśli odjemna i odjemnik mają różną ilość cyfr po przecinku, wypełniamy brakujące pola zerami.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 4 | 1 | , | 2 | 1 | 0 | 0 |
| - |  | 7 | 4 | , | 1 | 3 | 6 | 4 |
|  |  |  |  | , |  |  |  |  |

Odejmujemy liczby według znanej metody.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 13 |  |  |  | 10 |  |  |
|  | 0 | ~~3~~ | 11 |  | 1 | ~~0~~ | 9 | 10 |
|  | ~~1~~ | ~~4~~ | ~~1~~ | , | ~~2~~ | ~~1~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| - |  | 7 | 4 | , | 1 | 3 | 6 | 4 |
|  |  | 6 | 7 | , | 0 | 7 | 3 | 6 |

Zanim przystąpimy do mnożenia i dzielenia ułamków dziesiętnych, zauważmy pewne własności. Gdy chcemy pomnożyć 53,243 przez 10, otrzymamy:

Okazuje się, że pomnożenie liczby dziesiętnej przez 10 jest równoważne z przesunięciem przecinka o jedną pozycję w prawo. W tym momencie cyfry dziesiątek stają się cyframi setek, cyfry jedności stają się cyframi dziesiątek, cyfry części dziesiętnych stają się cyframi jedności itd., w rezultacie liczba zyskuje 10 razy większą wartość. Na tej samej zasadzie mnożenie przez 100 jest równoważne przesunięciu przecinka o dwie pozycje w prawo, mnożenie przez 1000 oznacza przesunięcie przecinka o trzy miejsca itd.

Podobnie, gdybyśmy chcieli podzielić 53,243 przez 10, mielibyśmy

Czyli dzielenie przez 10 jest tym samym, co przesunięcie przecinka o jedną pozycję w lewo, dzielenie przez 100 jest przesunięciem przecinka o dwie pozycje w lewo itd.

Mając to na uwadze, spróbujmy pomnożyć dwie dowolne liczby dziesiętne. Przypuśćmy, że chcemy pomnożyć liczby 12,4 oraz 1,03. Zauważmy, że

Oznacza to, że wynik takiego mnożenia będzie taki, jak wynik z przecinkiem przesuniętym o trzy pozycje w lewo. Mnożenie wykonujemy standardową metodą

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | 1 |  |
|  |  |  |  | 1 | 2 | 4 |
| ⋅ |  |  |  | 1 | 0 | 3 |
|  |  |  |  | 3 | 7 | 2 |
|  |  |  | 0 | 0 | 0 |  |
| + |  | 1 | 2 | 4 |  |  |
|  |  | 1 | 2 | 7 | 7 | 2 |

Mamy więc . Ogólnie, aby obliczyć iloczyn liczb z przecinkiem, mnożymy je bez przecinka, a potem wstawiamy przecinek w odpowiednim miejscu (wynik powinien mieć tyle cyfr po przecinku, co pierwsza i druga łącznie).

Dzielenie liczb dziesiętnych jest już bardziej wyczynowym sportem. Weźmy dla przykładu . Na początek wygodnie jest pozbyć się przecinka z dzielnika i „przerzucić go” do dzielnej:

W ogólności przesuwamy przecinek dzielnej o tyle pozycji w prawo, ile cyfr po przecinku ma dzielnik. Przygotowujemy się do dzielenia pisemnego:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | , |  |  |  |  |
| 3 | 7 | 5 | , | 8 | : | 1 | 6 |

W 37 liczba 16 mieści się dwa razy, zapisujemy więc dwójkę i odejmujemy 32, dopisujemy kolejną cyfrę.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 2 |  | , |  |  |  |  |
|  | 3 | 7 | 5 | , | 8 | : | 1 | 6 |
| - | 3 | 2 |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 5 | 5 |  |  |  |  |  |

W liczbie 55 szesnastka mieści się 3 razy – zapisujemy 3, odejmujemy 48 i spisujemy kolejną cyfrę – tym razem już zza przecinka:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 2 | 3 | , |  |  |  |  |
|  | 3 | 7 | 5 | , | 8 | : | 1 | 6 |
| - | 3 | 2 |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 5 | 5 |  |  |  |  |  |
| - |  | 4 | 8 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 7 |  | 8 |  |  |  |

W liczbie 78 liczba 16 mieści się 4 razy – zapisujemy 4 i odejmujemy 64. W dzielnej nie ma już cyfr do spisania, jednak jej rozwinięcie dziesiętne możemy przedłużać o dowolną ilość zer. Spisujemy więc cyfrę 0 i kontynuujemy:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 2 | 3 | , | 4 |  |  |  |
|  | 3 | 7 | 5 | , | 8 | : | 1 | 6 |
| - | 3 | 2 |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 5 | 5 |  |  |  |  |  |
| - |  | 4 | 8 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 7 |  | 8 |  |  |  |
| - |  |  | 6 |  | 4 |  |  |  |
|  |  |  | 1 |  | 4 | 0 |  |  |

Kontynuujemy procedurę, za każdym razem spisując zero. W końcu docieramy do momentu, gdy wynik odejmowania jest zerem. Dalsze dzielenie nie ma już sensu, więc przerywamy i odczytujemy wynik: .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 2 | 3 | , | 4 | 8 | 7 | 5 |
|  | 3 | 7 | 5 | , | 8 | : | 1 | 6 |
| - | 3 | 2 |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 5 | 5 |  |  |  |  |  |
| - |  | 4 | 8 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 7 |  | 8 |  |  |  |
| - |  |  | 6 |  | 4 |  |  |  |
|  |  |  | 1 |  | 4 | 0 |  |  |
| - |  |  | 1 |  | 2 | 8 |  |  |
|  |  |  |  |  | 1 | 2 | 0 |  |
| - |  |  |  |  | 1 | 1 | 2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  | 8 | 0 |
| - |  |  |  |  |  |  | 8 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 0 |

Nie zawsze będziemy mieć tyle szczęścia, by tak jak przed chwilą dotrzeć do jawnego końca tych żmudnych robótek. Czasami wynik jest liczbą o nieskończonym rozwinięciu dziesiętnym. Zastanówmy się nad działaniem . Do tej pory posługiwaliśmy się pojęciem reszty z dzielenia, ale nie jesteśmy już dziećmi – mamy przecież ułamki. W jaki sposób odkryć rozwinięcie dziesiętne ułamka ? Spróbujmy dokonać dzielenia pisemnego:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 | : | 7 |

Trochę nie wiadomo, jak się za to zabrać – nie zaszkodzi wzbogacić jedynki o zapasowe zero

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | , |  |  |  |
| 1 | , | 0 | : | 7 |

Teraz możemy już dokonać dzieła: w samej jedynce siódemka się nie mieści, więc w wyniku przed przecinkiem będzie widniało 0.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | , |  |  |  |
| 1 | , | 0 | : | 7 |

W 10 siódemka mieści się raz – zapisujemy 1, odejmujemy 7 i spisujemy kolejne 0

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | , | 1 |  |  |
|  | 1 | , | 0 | : | 7 |
| - |  |  | 7 |  |  |
|  |  |  | 3 | 0 |  |

Kontynuujemy procedurę:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | , | 1 | 4 | 2 | 8 | 5 | 7 |  |
|  | 1 | , | 0 | : | 7 |  |  |  |  |
| - |  |  | 7 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 3 | 0 |  |  |  |  |  |
| - |  |  | 2 | 8 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 2 | 0 |  |  |  |  |
| - |  |  |  | 1 | 4 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 6 | 0 |  |  |  |
| - |  |  |  |  | 5 | 6 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | 4 | 0 |  |  |
| - |  |  |  |  |  | 3 | 5 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | 5 | 0 |  |
| - |  |  |  |  |  |  | 4 | 9 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 0 |

W tym momencie zauważamy, że zatoczyliśmy koło: w tej chwili mamy do podzielenia 10 przez 7 i jest to dokładnie ta sama czynność, jakiej dokonaliśmy na samym początku słupka. Łatwo przewidzieć, że wszystkie kolejne kroki przebiegałyby w ten sam sposób i zwracałyby te same wyniki:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | , | 1 | 4 | 2 | 8 | 5 | 7 | 1 | 4 | 2 | 8 | 5 | 7 |  |
|  | 1 | , | 0 | : | 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| - |  |  | 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 3 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| - |  |  | 2 | 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 2 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| - |  |  |  | 1 | 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 6 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| - |  |  |  |  | 5 | 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | 4 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| - |  |  |  |  |  | 3 | 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | 5 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |
| - |  |  |  |  |  |  | 4 | 9 |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 0 |  |  |  |  |  |  |
| - |  |  |  |  |  |  |  |  | 7 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | 3 | 0 |  |  |  |  |  |
| - |  |  |  |  |  |  |  |  | 2 | 8 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 2 | 0 |  |  |  |  |
| - |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 4 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 6 | 0 |  |  |  |
| - |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 5 | 6 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 4 | 0 |  |  |
| - |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 3 | 5 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 5 | 0 |  |
| - |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 4 | 9 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 0 |

Nie ma sensu przedłużanie tej męki – zapisujemy wynik jako okresowy i kończymy robotę:

Zamiana ułamków dziesiętnych na zwykłe

Warsztat | Rozszerzenie

[wymagana znajomość tematu: Równania]

Za pomocą dzielenia pisemnego umiemy już konwertować ułamki zwykłe na dziesiętne. A w drugą stronę?

Z przypadkami ułamków skończonych potrafimy sobie radzić – wystarczy stworzyć mianownik mający jedynkę i odpowiednią ilość zer.

Sprawa nieco się komplikuje, gdy mamy do czynienia z okresami. Spróbujmy dowiedzieć się prawdy o liczbie . Oznaczmy tymczasowo

Trik polega na tym, by pomnożyć równanie obustronnie przez 1000 (jedynkę i trzy zera – bo tyle cyfr ma okres). Pomnożenie 0,(259) przez 1000 oznacza przesunięcie przecinka o trzy pozycje w prawo, a więc liczba 0,259259259259… stanie się liczbą 259,259259259… Mamy:

Wszystko staje się jasne, gdy odejmiemy dwa powyższe równania stronami:

Tajemnica rozwiązana: . Analizując powyższą metodę, możemy przewidzieć, że

Jeśli okres rozpoczyna się zaraz po przecinku, wystarczy stworzyć ułamek o liczniku równym okresowi i mianowniku złożonym z tylu dziewiątek, ile cyfr ma okres. A co jeśli okres nie zaczyna się zaraz po przecinku? Nie dajmy się ogarnąć bezradności:

Przy okazji natrafiliśmy na dość kontrowersyjną równość, mianowicie

Liczba naprawdę bardzo chce być jedynką. Chce być jedynką tak bardzo, że matematyka dała jej na to przyzwolenie. Mogłoby się wydawać, że 0,(9) jest jakby mniejsze niż jeden. Ale jeśli jest mniejsze, to o ile? Mniejsze o „nieskończenie małą” liczbę. Nieskończenie małą, czyli zerową…

W przypływie geniuszu niektórych mogłoby olśnić, że

Aby uniknąć upokorzenia na scenie matematycznej, nie zapominajmy, że coś takiego jak nie istnieje. Ubranie zera w okresowy nawias oznacza, że zero będzie się ciągnąć w **nieskończoność**. Nie można więc powiedzieć, że na **końcu** będzie jedynka.

1. dziedziną „życia” [↑](#footnote-ref-1)
2. Wprawdzie nie tłumaczyliśmy jeszcze, czym jest długość, jednak mając Cię za osobę rozgarniętą, zakładamy, że wiesz, czym jest metr. [↑](#footnote-ref-2)
3. Jeśli ta tasiemka na Twoim monitorze nie ma metra, powinieneś zaopatrzyć się w większy wyświetlacz. [↑](#footnote-ref-3)
4. Słownik podaje, że „szacowny” oznacza „posiadający dużą wartość”. Nie jest to w pełni prawda – w matematyce szacować można także bardzo małe liczby. [↑](#footnote-ref-4)
5. Poprawnie liczbę tę wypadałoby odczytać „jeden i sześćset dziewięć tysięcy trzysta czterdzieści cztery milionowe”. W praktyce i tak czytamy „jeden przecinek sześć zero dziewięć trzy cztery cztery”. [↑](#footnote-ref-5)
6. Ty też bądź bohaterem w swoim domu. [↑](#footnote-ref-6)
7. Podobnie [↑](#footnote-ref-7)